



1. کوچکترین مضرب مشترک دو عدد ( ک . م . م )



(1-1) تعریف

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد طبیعی  $a$  و  $b$  کوچکترین عدد طبیعی است که هم بر  $a$  و هم بر  $b$  بخش پذیر باشد .  
کوچکترین مضرب مشترک دو عدد طبیعی  $a$  و  $b$  را با علامت  $a \amalg b$  نمایش می دهند .





1-2) روشهای تعیین ک. م. م

**روش تشکیل مجموعه مضربهای طبیعی**

در این روش فرض کنیم می خواهیم ک. م. م دو عدد  $a$  و  $b$  را بدست آوریم .

ابتدا  $M_a$  و  $M_b$  را یافته ( مجموعه مضربهای طبیعی دو عدد  $a$  و  $b$  ) ، سپس در مجموعه  $M_a \cap M_b$  کوچکترین عضو مجموعه ، همان ک. م. م دو عدد  $a$  و  $b$  می باشد .

مثال ) کوچکترین مضرب مشترک هر دسته از اعداد زیر را با استفاده از تشکیل مجموعه مضربها بدست آورید .

1)  $18 \amalg 12$ 

جواب 1-

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{18} = \{18, 36, 54, 72, 90, \dots\} \\ M_{12} = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, \dots\} \end{array} \right\} M_{18} \cap M_{12} = \{36, 72, \dots\} \Rightarrow 18 \amalg 12 = 36$$

2)  $24 \amalg 32$ 

جواب 2-

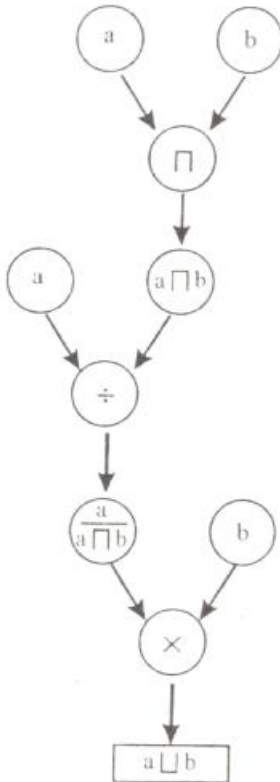
$$\left\{ \begin{array}{l} M_{24} = \{24, 48, 72, 96, \dots\} \\ M_{32} = \{32, 64, 96, \dots\} \end{array} \right\} M_{24} \cap M_{32} = \{96, 192, \dots\} \Rightarrow 24 \amalg 32 = 96$$





## روش استفاده از ب. م. م

اگر  $a$  و  $b$  دو عدد طبیعی باشند و بخواهیم  $a \sqcup b$  را در این روش بدست آوریم، مانند مراحل زیر عمل می کنیم:



مرحله 1- ابتدا ب. م. م را بدست می آوریم.

مرحله 2- یکی از دو عدد  $a$  و  $b$  را مثلاً  $a$  را بر ب. م. م تقسیم می کنیم.

مرحله 3- حاصل عمل مرحله دوم را در عدد دیگر که در اینجا  $b$  است، ضرب می کنیم.

ک. م. م عدد  $a$  و  $b$  بدست می آید.

مراحل بالا به وسیله نمودار زیر بیان شده است:

## نکات

1) مراحل فوق را می توان به صورت زیر فرمول بندی کرد:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}; \left\{ \begin{array}{l} a \sqcup b = \frac{a}{a \sqcap b} \times b = \frac{ab}{a \sqcap b} \\ a \sqcup b = \frac{b}{a \sqcap b} \times a = \frac{ab}{a \sqcap b} \end{array} \right\} a \sqcup b = \frac{ab}{a \sqcap b} \Rightarrow (a \sqcup b) \times (a \sqcap b) = ab$$

2) اگر  $a$  و  $b$  دو عدد طبیعی متباین (نسبت به هم اول) باشند یعنی  $a \sqcap b = 1$ ، داریم:

$$a \sqcup b = \frac{ab}{a \sqcap b} \xrightarrow{a \sqcap b = 1} a \sqcup b = ab$$

به عنوان تمرین:

$$2 \sqcap 3 = 1 \Rightarrow 2 \sqcup 3 = 2 \times 3 = 6$$

$$20 \sqcap 17 = 1 \Rightarrow 20 \sqcup 17 = 20 \times 17 = 340$$





مثال 3) حاصل  $128 \amalg 160$  با سه مرحله بیان شده در درس پیدا کنید .

جواب 3-

مرحله 1 :  $160 \amalg 128 = 32$

مرحله 2 :  $128 \div 32 = 4$

مرحله 3 :  $128 \amalg 160 = 160 \times 4 = 640$

مثال ( ک . م . م هر دسته از اعداد زیر را با استفاده از فرمول بدست آورید .

4)  $18 \amalg 38$

جواب 4-

$$a \amalg b = \frac{ab}{a \amalg b} \Rightarrow 18 \amalg 38 = \frac{18 \times 38}{2} ; \left\{ \begin{array}{l} 18 = 3^2 \times 2 \\ 38 = 2 \times 19 \end{array} \right\} 18 \amalg 38 = 2$$

$$\Rightarrow 18 \amalg 38 = 342$$

5)  $(4^3 \times 27^2) \amalg (8^4 \times 9^2)$

جواب 5-

$$\left\{ \begin{array}{l} 4^3 \times 27^2 = (2^2)^3 \times (3^3)^2 = 2^6 \times 3^6 \\ 8^4 \times 9^2 = (2^3)^4 \times (3^2)^2 = 2^{12} \times 3^4 \end{array} \right\} (4^3 \times 27^2) \amalg (8^4 \times 9^2) = 2^6 \times 3^4$$

$$a \amalg b = \frac{ab}{a \amalg b} \Rightarrow (4^3 \times 27^2) \amalg (8^4 \times 9^2) = \frac{(4^3 \times 27^2) \times (8^4 \times 9^2)}{2^6 \times 3^4}$$

$$\Rightarrow (4^3 \times 27^2) \amalg (8^4 \times 9^2) = \frac{(2^6 \times 3^6) \times (2^{12} \times 3^4)}{2^6 \times 3^4}$$

$$\Rightarrow (4^3 \times 27^2) \amalg (8^4 \times 9^2) = 3^6 \times 2^{12}$$





مثال ( طرف دوم تساویهای زیر را بدست آورید .

6)  $24 \div 18 = \dots \Rightarrow 24 \div 18 = \dots$

جواب 6-

$$24 \div 18 = 6 \Rightarrow 24 \div 18 = \frac{24 \times 18}{6} = 72$$

7)  $38 \div 20 = \dots \Rightarrow 38 \div 20 = \dots$

جواب 7-

$$38 \div 20 = 2 \Rightarrow 38 \div 20 = \frac{38 \times 20}{2} = 380$$







## روش تجزیه به حاصلضرب اعداد اول

در این روش برای یافتن ک . م . م ابتدا  $a$  و  $b$  ( که هر دو غیر صفرند ) را به حاصلضرب عوامل اول تجزیه می کنیم ، سپس عوامل مشترک با بیشترین توان و غیر مشترک را در هم ضرب می کنیم .

مثال) کوچکترین مضرب مشترک هر دسته از اعداد زیر را به روش تجزیه به حاصلضرب عوامل اول بدست آورید .

$$8) 1680 \amalg 4400$$

جواب 8-

$$\left\{ \begin{array}{l} 1680 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7 \\ 4400 = 2^4 \times 5^2 \times 11 \end{array} \right\} 1680 \amalg 4400 = 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 92400$$

$$9) 150 \amalg 180 \amalg 210$$

جواب 9-

$$\left\{ \begin{array}{l} 150 = 2 \times 3 \times 5^2 \\ 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \end{array} \right\} 150 \amalg 180 \amalg 210 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 6300$$





$$10) (18^4 \times 10^3) \amalg (72 \times 24^2) \amalg 20^4$$

جواب 10-

$$\begin{cases} 18^4 \times 10^3 = (2 \times 3^2)^4 \times (2 \times 5)^3 = 2^4 \times 3^8 \times 2^3 \times 5^3 = 2^7 \times 3^8 \times 5^3 \\ 72 \times 24^2 = (2^3 \times 3^2) \times (2^3 \times 3)^2 = 2^3 \times 3^2 \times 2^6 \times 3^2 = 2^9 \times 3^4 \\ 20^4 = (2^2 \times 5)^4 = 2^8 \times 5^4 \end{cases}$$

$$(18^4 \times 10^3) \amalg (72 \times 24^2) \amalg 20^4 = 2^9 \times 3^8 \times 5^4$$

مثال) حاصل عبارات زیر را با بدست آوردن ک . م . م مخرجها بدست آورید .

$$11) \frac{7}{24} + \frac{11}{36}$$

جواب 11-

$$24 \amalg 36 = 72$$

$$\frac{7}{24} + \frac{11}{36} = \frac{(3 \times 7) + (2 \times 11)}{72} = \frac{21 + 22}{72} = \frac{43}{72}$$

$$12) \frac{8}{5} + \frac{9}{6} - \frac{7}{25}$$

جواب 12-

$$5 \amalg 6 \amalg 25 = 30 \amalg 25 = 5 \amalg (2 \times 3) \amalg 5^2 = 5^2 \times 2 \times 3 = 150$$

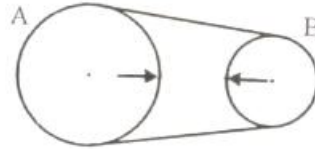
$$\frac{8}{5} + \frac{9}{6} - \frac{7}{25} = \frac{(30 \times 8) + (25 \times 9) - (6 \times 7)}{150} = \frac{240 + 225 - 42}{150} = \frac{423}{150} = \frac{141}{50}$$





**مثال 13)** در شکل زیر محیط چرخ بزرگ  $45\text{cm}$  و محیط چرخ کوچک  $27\text{cm}$  می باشد. این دو چرخ توسط تسمه ای به هم وصل شده اند و تسمه بدون لغزش بر روی چرخها، آنها را به حرکت در می آورد.

چرخ بزرگ چند دور بزند تا برای بار پنجم دو علامت مقابل هم قرار بگیرند؟



**جواب 13-**

ابتدا ک . م . م دو محیط را بدست می آوریم :

$$45 \cap 27 = (3^2 \times 5) \cap 3^3 = 3^3 \times 5 = 135$$

برای اینکه دو علامت برای اولین بار پس از شروع حرکت مقابل هم قرار بگیرند، چرخ A باید  $135\text{cm}$  حرکت کند که برابر  $3 = \frac{135}{45}$  دور می باشد. تعداد دورهایی که باید چرخ بزرگ بزند  $5 \times 3 = 15$  تا است تا دو علامت برای بار پنجم مقابل هم قرار گیرند.

**مثال 14)** کوچکترین عدد چهار رقمی را بیابید که باقیمانده آن بر هر یک از اعداد 18 و 20 و 22 برابر 15 باشد.

**جواب 14-**

$$\overline{abcd} = 18 \times q_1 + 15$$

$$\overline{abcd} = 20 \times q_2 + 15$$

$$\overline{abcd} = 22 \times q_3 + 15$$

ابتدا ک . م . م سه عدد  $(22, 20, 18)$  را بدست می آوریم :

$$18 \cap 20 \cap 22 = (2 \times 3^2) \cap (2^2 \times 5) \cap (2 \times 11) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11 = 1980$$

1980 کوچکترین عددی است که بر 18 و 20 و 22 تماماً بخش پذیر است.

$$1980 = 18 \times q_1 = 20 \times q_2 = 22 \times q_3$$

$$1980 + 15 = 18 \times q_1 + 15 = 20 \times q_2 + 15 = 22 \times q_3 + 15 \Rightarrow \overline{abcd} = 1995$$







مثال 15) ک. م. م دو عدد  $M = 2^a \times 18$  و  $N = 2^{a+3} \times 3$  برابر 1152 می باشد :

1-  $a$  را بدست آورید .

2- ب. م. م دو عدد  $M$  و  $N$  را محاسبه کنید .

جواب 15-

1-

$$\begin{cases} M = 2^a \times 18 = 2^a \times (2 \times 3^2) = 2^{a+1} \times 3^2 \\ N = 2^{a+3} \times 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M \Pi N = 1152 &\Rightarrow (2^{a+1} \times 3^2) \Pi (2^{a+3} \times 3) = 2^7 \times 3^2 \\ &\Rightarrow 2^{a+3} \times 3^2 = 2^7 \times 3^2 \\ &\Rightarrow a+3 = 7 \\ &\Rightarrow a = 4 \end{aligned}$$

2-

$$M \Pi N = (2^5 \times 3^2) \Pi (2^7 \times 3) = 2^5 \times 3 = 32 \times 3 = 96$$

مثال) اگر  $M = 15^3 \times 16^4 \times 18^5 \times 25^3$  و  $N = 8^7 \times 9^7 \times 10^7$  دو عدد طبیعی باشد ، حاصل عبارات زیر را بدست آورید :

16)  $M \Pi N$

جواب 16-

$$\begin{cases} M = 15^3 \times 16^4 \times 18^5 \times 25^3 = (3 \times 5)^3 \times (2^4)^4 \times (2 \times 3^2)^5 \times (5^2)^3 = 3^3 \times 5^3 \times 2^{16} \times 2^5 \times 3^{10} \times 5^6 \Rightarrow M = 2^{21} \times 3^{13} \times 5^9 \\ N = 8^7 \times 9^7 \times 10^7 = (2^3)^7 \times (3^2)^7 \times (2 \times 5)^7 = 2^{21} \times 3^{14} \times 2^7 \times 5^7 = 2^{28} \times 3^{14} \times 5^7 \end{cases}$$

$$M \Pi N = (2^{21} \times 3^{13} \times 5^9) \Pi (2^{28} \times 3^{14} \times 5^7) = 2^{21} \times 3^{13} \times 5^7$$



17)  $M \amalg N$ 

جواب 17-

$$M \amalg N = (2^{21} \times 3^{13} \times 5^9) \amalg (2^{28} \times 3^{14} \times 5^7) = 2^{28} \times 3^{14} \times 5^9$$

18)  $\frac{M \amalg N}{M \amalg N}$ 

جواب 18-

$$\frac{M \amalg N}{M \amalg N} = \frac{(2^{28} \times 3^{14} \times 5^9)}{(2^{21} \times 3^{13} \times 5^7)} = 2^7 \times 3 \times 5^2$$

19)  $\frac{M}{2^{20} \times 3^{12} \times 5^8} \amalg \frac{N}{2^{27} \times 3^{13} \times 5^6}$ 

جواب 19-

$$\frac{M}{2^{20} \times 3^{12} \times 5^8} \amalg \frac{N}{2^{27} \times 3^{13} \times 5^6} = \frac{2^{21} \times 3^{13} \times 5^9}{2^{20} \times 3^{12} \times 5^8} \amalg \frac{2^{28} \times 3^{14} \times 5^7}{2^{27} \times 3^{13} \times 5^6} = (2 \times 3 \times 5) \amalg (2 \times 3 \times 5) = 2 \times 3 \times 5 = 30$$





مثال) حاصل عبارت زیر را بدست آورید .

$$20) \frac{(225 \times 105) \times 12}{45 \times 75}$$

جواب 20-

$$\left\{ \begin{array}{l} 225 = 3^2 \times 5^2 \\ 105 = 3 \times 5 \times 7 \\ 45 = 3^2 \times 5 \\ 75 = 3 \times 5^2 \\ 12 = 2^2 \times 3 \end{array} \right\} \frac{(225 \times 105) \times 12}{45 \times 75} = \frac{(3^2 \times 5^2 \times 3 \times 5 \times 7) \times (2^2 \times 3)}{(3^2 \times 5) \times (3 \times 5^2)} = \frac{(3 \times 5) \times (2^2 \times 3)}{(3 \times 5)} = \frac{2^2 \times 3 \times 5}{(3 \times 5)} = 2^2 = 4$$

$$21) \frac{(15^2 \times 3) \times (12^2 \times 5)}{(3^3 \times 5) \times (36 \times 5)}$$

جواب 21-

$$\frac{(15^2 \times 3) \times (12^2 \times 5)}{(3^3 \times 5) \times (36 \times 5)} = \frac{[(3 \times 5)^2 \times 3] \times [(2^2 \times 3)^2 \times 5]}{(3^3 \times 5) \times [(2^2 \times 3^2) \times 5]} = \frac{(3^2 \times 5^2 \times 3) \times (2^4 \times 3^2 \times 5)}{(3^3 \times 5) \times (2^2 \times 3^2 \times 5)}$$

$$= \frac{(3^3 \times 5^2) \times (2^4 \times 3^2 \times 5)}{(3^3 \times 5) \times (2^2 \times 3^2 \times 5)} = \frac{2^4 \times 3^3 \times 5^2}{3^2 \times 5} = 2^4 \times 3 \times 5 = 240$$





مثال 22) آیا  $M = 25 \times 64^2$  بر عدد  $N = 125^2 \times 16^2$  بخش پذیر است؟

$M^{20}$  بر  $N^{20}$  چطور؟

$M^{80}$  بر  $N^{20}$  چطور؟

جواب 22-

$$\begin{cases} M = 25 \times 64^2 = (5^2) \times (2^6)^2 = 5^2 \times 2^{12} \\ N = 125^2 \times 16^2 = (5^3)^2 \times (2^4)^2 = 5^6 \times 2^8 \end{cases}$$

همانطور که ملاحظه می شود، عوامل اول  $M$  و  $N$  یکسان می باشند ولی توان عامل 5 در  $N$  بیشتر از  $M$  می باشد، لذا  $M$  بر  $N$  بخش پذیر نیست.

$$\begin{cases} M^{20} = (5^2 \times 2^{12})^{20} = 5^{40} \times 2^{240} \\ N^{20} = (5^6 \times 2^8)^{20} = 5^{120} \times 2^{160} \end{cases}$$

$M^{20}$  بر  $N^{20}$  بخش پذیر نیست.

$$\begin{cases} M^{80} = (5^2 \times 2^{12})^{80} = 5^{160} \times 2^{960} \\ N^{20} = 5^{120} \times 2^{160} \end{cases}$$

$M^{80}$  بر  $N^{20}$  بخش پذیر است.

