



1. بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد (ب . م . م)



تعریف (1-1)

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد، بزرگترین عدد طبیعی ای است که هر دو عدد بر آن بخش پذیر باشند.
بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد طبیعی a ، b را با علامت $a \amalg b$ نمایش می دهند.



روشهای تعیین ب . م . م (1-2)

روش تشکیل مجموعه های مقسوم علیه های طبیعی

در این روش فرض کنیم می خواهیم ب . م . م دو عدد a و b را بدست آوریم .

ابتدا D_a و D_b را یافته (مجموعه مقسوم علیه های عدد a و عدد b)، سپس در مجموعه $D_a \cap D_b$ بزرگترین عضو مجموعه همان ب.م.م دو عدد a و b می باشد .





مثال) با روش تشکیل مجموعه مقسوم علیه های طبیعی ، بزرگترین مقسوم علیه مشترک هر دسته از اعداد داده شده در زیر را بدست آورید.

1) $18 \cap 12$

جواب 1-

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \\ D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \end{array} \right\} D_{18} \cap D_{12} = \{1, 2, 3, 6\} \Rightarrow 18 \cap 12 = 6$$

2) $14 \cap 45$

جواب 2-

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{14} = \{1, 2, 7, 14\} \\ D_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} \end{array} \right\} D_{14} \cap D_{45} = \{1\} \Rightarrow 14 \cap 45 = 1$$

3) $15 \cap 35 \cap 45$

جواب -

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{15} = \{1, 3, 5, 15\} \\ D_{35} = \{1, 5, 7, 35\} \\ D_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} \end{array} \right\} D_{15} \cap D_{35} \cap D_{45} = \{1, 5\} \Rightarrow 15 \cap 35 \cap 45 = 5$$





نکته

دو عدد متباین (نسبت به هم اول)

دو عدد را نسبت به هم اول گویند در صورتی که بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها عدد 1 باشد.

به عنوان تمرین، دو عدد 8 و 15 نسبت به هم اولند:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_8 = \{1, 2, 4, 8\} \\ D_{15} = \{1, 3, 5, 15\} \end{array} \right\} D_8 \cap D_{15} = \{1\} \Rightarrow 8 \prod 15 = 1$$

مثال 4) ثابت کنید دو عدد اول متفاوت مانند p و q نسبت به هم اولند.

جواب 4-

$$\left\{ \begin{array}{l} p : D_p = \{1, p\} \\ q : D_q = \{1, q\} \end{array} \right\} D_p \cap D_q = \{1\} \Rightarrow p \prod q = 1$$

بنابراین p و q نسبت به هم اولند.





روش تقسیم های متوالی (روش نردبانی)

به عنوان تمرین، می خواهیم $18 \div 12$ را که قبلاً با روش تشکیل مجموعه مقسوم علیه های طبیعی محاسبه کرده ایم، به روش تقسیم های متوالی حساب کنیم :

$$\frac{18 \overline{)12}}{-12 \quad 1} \rightarrow \frac{12 \overline{)6}}{-12 \quad 2} \rightarrow 18 \div 12 = 6$$

مرحله اول : عدد 18 (عدد بزرگتر) را بر 12 تقسیم می کنیم . این تقسیم باقیمانده ای برابر 6 دارد .

مرحله دوم : مقسوم علیه قدیمی (یعنی 12) را بر باقیمانده غیر صفر (یعنی 6) تقسیم می کنیم . در این مرحله باقیمانده صفر می شود . مقسوم علیه این تقسیم که همان باقیمانده تقسیم قبلی است ب . م . م می باشد . این الگوریتم را تا آنجا باید ادامه دهیم که باقیمانده صفر شود .

	۱	۲	
۱۸	۱۲	۶	۰
۱۲	۱۲		

عملیات فوق را در جدولی می توان تنظیم کرد :

$$18 \div 12 = 6$$

سطر اول این جدول سلسله خارج قسمتها است و این جدول به جدول نردبانی معروف است .

خانه های سطر دوم از تفاضل مقسوم و باقیمانده مربوط به همان تقسیم به دست می آید .





مثال) ب . م . م اعداد زیر را به روش نردبانی بدست آورید :

$$5) 38 \Pi 15$$

جواب 5-

	۲۵	۱	۲	
۳۸۵	۱۵	۱۰	۵	۰
۳۷۵	۱۰	۱۰		

$$385 \Pi 15 = 5$$

$$6) 442 \Pi 286$$

جواب 6-

	۱	۱	۱	۵	
۴۴۲	۲۸۶	۱۵۶	۱۳۰	۲۶	۰
۲۸۶	۱۵۶	۱۳۰	۱۳۰		

$$442 \Pi 286 = 26$$

$$7) (n+1) \Pi n$$

جواب 7-

	۱	n	
n+۱	n	۱	۰
n	n		

$$(n+1) \Pi n = 1$$





مثال) در مثال‌های زیر برای یافتن ب. م. م دو عدد از روش نردبانی استفاده کرده ایم. جدول را کامل کنید و اعداد a و b را بدست آورید.

8)

	۱	۲	۳	
a	b	r_1	۳	۰

جواب 8-

$$a = b \times 1 + r_1$$

$$b = r_1 \times 2 + 3$$

$$r_1 = 3 \times 3 + 0 \Rightarrow r_1 = 9 \Rightarrow b = 9 \times 2 + 3 = 21 \Rightarrow a = 21 \times 1 + 9 = 30$$

	۱	۲	۳	
۳۰	۲۱	۹	۳	۰
۲۱	۱۸	۹		

9)

	۲	۱		۳	
a	b			۲	۰
		18			

جواب 9-

$$a = b \times 2 + r_1 \quad \text{(I)}$$

$$b = r_1 \times 1 + r_2 \quad \text{(II)}$$

$$r_1 = r_2 \times q_3 + 2 \quad \text{(III)}$$

$$r_2 = 2 \times 3 + 0 \Rightarrow r_2 = 6$$

$$r_1 - 2 = 18 \Rightarrow r_1 = 20 \xrightarrow{\text{(III)}} 20 = 6 \times q_3 + 2 \Rightarrow 18 = 6 \times q_3 \Rightarrow q_3 = 3 \xrightarrow{\text{(II)}} b = 20 \times 1 + 6 = 26$$

$$\xrightarrow{\text{(I)}} a = 26 \times 2 + 20 = 72$$

	۲	۱	q_3	۳	
a	b	r_1	r_2	۲	۰
$a - r_1$	$b - r_2$	$r_1 - 2$	$r_2 - 0$		

	۲	۱	۳	۳	
72	۲۶	۲۰	۶	۲	۰
۵۲	۲۰	۱۸	۶		





10)

	q_1	q_2	q_3	۳	
a	b	r_1	r_2	r_3	\circ
۲۰	۷	۶	۳		

جواب 10-

$$a = b \times q_1 + r_1 \quad (1)$$

$$b = r_1 \times q_2 + r_2 \quad (2)$$

$$r_1 = r_2 \times q_3 + r_3 \quad (3)$$

$$r_2 = r_3 \times 3 + 0 \quad (4)$$

$$a - r_1 = 20 \quad (5)$$

$$b - r_2 = 7 \quad (6)$$

$$r_1 - r_3 = 6 \quad (7)$$

$$r_2 - 0 = 3 \Rightarrow r_2 = 3 \xrightarrow{(4)} 3 = r_3 \times 3 \Rightarrow r_3 = 1 \xrightarrow{(7)} r_1 - 1 = 6 \Rightarrow r_1 = 7$$

$$b - r_2 = 7 \xrightarrow{r_2=3} b - 3 = 7 \Rightarrow b = 10$$

$$a - r_1 = 20 \xrightarrow{r_1=7} a - 7 = 20 \Rightarrow a = 27$$

$$r_1 = r_2 \times q_3 + r_3 \xrightarrow{r_1=7, r_2=3, r_3=1} 7 = 3 \times q_3 + 1 \Rightarrow 6 = 3 \times q_3 \Rightarrow q_3 = 2$$

$$b = r_1 \times q_2 + r_2 \Rightarrow 10 = 7 \times q_2 + 3 \Rightarrow 7 = 7 \times q_2 \Rightarrow q_2 = 1$$

$$a = b \times q_1 + r_1 \Rightarrow 27 = 10 \times q_1 + 7 \Rightarrow 20 = 10 \times q_1 \Rightarrow q_1 = 2$$

	۲	۱	۲	۳	
$a = ۲۷$	$b = ۱۰$	۷	۳	۱	\circ
۲۰	۷	۶	۳		





روش تجزیه به حاصلضرب اعداد اول

در این روش برای تعیین ب . م . م دو عدد a و b ابتدا آنها را به حاصلضرب عوامل اول تجزیه می کنیم ، سپس عوامل مشترک را با کمترین توان انتخاب و در هم ضرب می کنیم .
عدد حاصل همان ب . م . م دو عدد a و b می باشد .

مثال) بزرگترین مقسوم علیه مشترک هر دسته از اعداد زیر را با استفاده از تجزیه هر عدد به حاصلضرب عوامل اول بدست آورید .

$$11) 18 \cap 12$$

جواب 11-

$$\left\{ \begin{array}{l} 18 = 2 \times 3^2 \\ 12 = 2^2 \times 3 \end{array} \right\} 18 \cap 12 = 2 \times 3 = 6$$

$$12) 336 \cap 1500 \cap 1800$$

جواب 12-

$$\left\{ \begin{array}{l} 336 = 2^4 \times 3 \times 7 \\ 1500 = 2^2 \times 3 \times 5^3 \\ 1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \end{array} \right\} 336 \cap 1500 \cap 1800 = 2^2 \times 3 = 12$$





$$13) (45 \times 12 \times 18) \Pi (27^2 \times 5)$$

جواب 13-

$$\left\{ \begin{array}{l} 45 \times 12 \times 18 = (3^2 \times 5) \times (2^2 \times 3) \times (2 \times 3^2) = 2^3 \times 3^5 \times 5 \\ 27^2 \times 5 = (3^3)^2 \times 5 = 3^6 \times 5 \end{array} \right\} (45 \times 12 \times 18) \Pi (27^2 \times 5) = 3^5 \times 5 = 1215$$

$$14) 9000 \Pi 3600 \Pi 6048$$

جواب 14-

$$\left\{ \begin{array}{l} 9000 = 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \\ 3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \\ 6048 = 2^5 \times 3^3 \times 7 \end{array} \right\} 9000 \Pi 3600 \Pi 6048 = 2^3 \times 3^2 = 72$$

$$15) (8^2 \times 10^3 \times 12^4) \Pi (18^3 \times 15^2 \times 14^2)$$

جواب-

$$\left\{ \begin{array}{l} 8^2 \times 10^3 \times 12^4 = (2^3)^2 \times (2 \times 5)^3 \times (2^2 \times 3)^4 = 2^6 \times 2^3 \times 5^3 \times 2^8 \times 3^4 = 2^{17} \times 3^4 \times 5^3 \\ 18^3 \times 15^2 \times 14^2 = (2 \times 3^2)^3 \times (3 \times 5)^2 \times (2 \times 7)^2 = 2^3 \times 3^6 \times 3^2 \times 5^2 \times 2^2 \times 7^2 = 2^5 \times 3^8 \times 5^2 \times 7^2 \end{array} \right.$$

$$(8^2 \times 10^3 \times 12^4) \Pi (18^3 \times 15^2 \times 14^2) = 2^5 \times 3^4 \times 5^2$$





مثال 16) اگر ب. م. م دو عدد $M = 4^x \times 6^3$ و $N = 8^2 \times 9$ برابر 288 باشد، مقدار x چقدر است؟

جواب 16-

$$\begin{cases} M = 4^x \times 6^3 = (2^2)^x \times (2 \times 3)^3 = 2^{2x} \times 2^3 \times 3^3 = 2^{2x+3} \times 3^3 \\ N = 8^2 \times 9 = (2^3)^2 \times (3^2) = 2^6 \times 3^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M \Pi N = 288 &\Rightarrow 2^5 \times 3^2 \Rightarrow (2^{2x+3} \times 3^3) \Pi (2^6 \times 3^2) = 2^5 \times 3^2 \\ &\Rightarrow 2x + 3 = 5 \\ &\Rightarrow 2x = 2 \\ &\Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

مثال 17) اگر $M = 24^2 \times 18^3 \times 4$ و $N = 15^4 \times 12^5$ ، حاصل عبارتهای $MN \Pi M$ و $MN \Pi N$ را بدست آورید.

جواب 17-

$$\begin{cases} M = 24^2 \times 18^3 \times 4 = (2^3 \times 3)^2 \times (2 \times 3^2)^3 \times 2^2 = 2^6 \times 3^2 \times 2^3 \times 3^6 \times 2^2 = 2^{11} \times 3^8 \\ N = 15^4 \times 12^5 = (3 \times 5)^4 \times (2^2 \times 3)^5 = 3^4 \times 5^4 \times 2^{10} \times 3^5 = 2^{10} \times 3^9 \times 5^4 \\ MN = (2^{11} \times 3^8)(2^{10} \times 3^9 \times 5^4) = 2^{21} \times 3^{17} \times 5^4 \end{cases}$$

$$MN \Pi M = (2^{21} \times 3^{17} \times 5^4) \Pi (2^{11} \times 3^8) = 2^{11} \times 3^8 = M$$

$$MN \Pi N = (2^{21} \times 3^{17} \times 5^4) \Pi (2^{10} \times 3^9 \times 5^4) = 2^{10} \times 3^9 \times 5^4 = N$$

